

## MODELOS MATEMÁTICOS DE MOAGEM: PARÂMETROS E APLICAÇÃO

Belarmino Barbosa Lira <sup>(1)</sup>

## RESUMO

O presente trabalho aborda dois modelos matemáticos de moagem (Multi-segment - Perfect Mixing), desenvolvido no Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre do Departamento de Minas e Metalurgia da Universidade de Queensland, Austrália. O "Multi-segment model" é uma extensão do "Perfect mixing model", onde o moinho é dividido em um número de segmentos. Cada um desses segmentos é simulado através do "Perfect mixing model". Uma aplicação desse último modelo na simulação do circuito industrial de cominuição da mina de Jubilee (Western Australia) é apresentada.

## ABSTRACT

Two ball mill models, Multi-segment and Perfect mixing, developed by University of Queensland Department of Mining and Metallurgical Engineering were analysed. The multi-segment model is an extension of the perfect mixing model where the mill is divided into a number of perfectly mixing segments. These models have been used by the Australian Mining and will be summarised in this paper. A case study of the simulation of the Jubilee grinding circuit (Western Australia) is presented.

(1) M.Sc., Ph.D., Professor Adjunto do Departamento de Mineração e Geologia da UFPA

## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos matemáticos sobre balanço populacional refletem os mecanismos dos processos de cominuição, em um sistema de moagem. A distinção entre esses modelos é o grau de descrição física empregada para simular a cinética dos processos de cominuição, transporte e eficiência dos classificadores. Esses modelos são utilizados com sucesso em diversas aplicações na indústria mineral, tais como:

- a) Avaliação dos circuitos alternativos
- b) Dimensionamento dos circuitos de moagem
- c) Otimização dos processos de cominuição
- d) Utilização na simulação com objetivo de desenvolver uma estratégia para controle de processos.

Simulação matemática dos circuitos múltiplos cominuição/classificação, permite um razoável grau de precisão e detalhe requerido na indústria. Essa metodologia, além de permitir o dimensionamento de maneira apropriada, prediz os efeitos de mudança das variáveis de processo no produto final. A simulação também pode otimizar os circuitos de cominuição e estabelecer uma estratégia de controle adequado a cada sistema.

Modelos matemáticos de moagem são bem descritos na literatura (Reid, 1965; Herbst et al., 1971; Austin, 1973; Whiten, 1976; Lynch, 1977; Lynch et al., 1986; Narayanan, 1976; Lira, 1989). Este artigo descreve os modelos matemáticos desenvolvidos no Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre - JKMRC, para simulação dos circuitos industriais de cominuição.

## 2. MODELOS MATEMÁTICOS

Modernos modelos matemáticos dos circuitos de cominuição, utilizam-se de uma combinação da função de transporte em conjunção com os seguintes mecanismos:

- a) Razão específica de fragmentação ou função seleção, que descreve a taxa por unidade de massa no qual uma partícula de um tamanho específico seria moída.
- b) Função distributiva de moagem (appearance function) que descreve a distribuição granulométrica acumulativa por peso das partículas resultantes do processo de moagem.

Esses mecanismos são ilustrados na Figura 1 e sumarizados nas secções seguintes:

### 2.1. Função Distributiva de Moagem

A função distributiva de moagem descreve os resultados de cominuição em termos da proporção inicial de partículas do tamanho  $x_j$  que produz  $x_i$  ou partículas menores. Diversas formas da função distributiva são usadas pelos pesquisadores (Gaudin e Meloy, 1982; Harris, 1968; Austin, 1971/72; Klimpel & Austin, 1977; Apling et al., 1982), para descrever a função distributiva de moagem (Appearance function):

$$b_{ij} = \left[ \frac{x_i}{x_j} \right]^\beta \quad (1)$$

$$b_{ij} = \phi \left[ \frac{x_i}{x_j} \right]^\beta + (\phi - 1) \left[ \frac{x_i}{x_j} \right]^\alpha \quad (\phi < 1) \quad (2)$$

$$b_{ij} = \frac{(1 - \exp(-x_i/x_j))}{(1 - \exp(-1))} \quad (3)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  e  $\phi$  = parâmetros

A forma fracional, representando a fração de material no intervalo de tamanho  $i$ , produzido pela cominuição da fração  $j$ , pode ser expressa pela equação:

$$E_{ij} = b_{i,j} - b_{i+1,j} \quad (4)$$

A função distributiva de moagem (Appearance function),  $b_{ij}$  descreve as características das propriedades do minério.

Várias técnicas para caracterização da função distributiva de moagem, utilizando moinhos em escala de bancada ou contínuos, foram propostas por vários autores, entre as quais podemos citar:

- a) Técnicas de radiação através de determinação direta
- b) Testes de cominuição com partículas unitárias com moinhos em escala de bancada
- c) Cálculo dos parâmetros de moagem por meio de testes de cominuição em diversos intervalos de tempo.

Técnicas de cominuição com partículas unitárias para caracterização da função de moagem têm sido utilizadas por diversos autores (Awachie, 1983; Narayanan, 1986; Leung, 1987; Lira, 1989). Essas técnicas têm uma vantagem sobre as demais, porque são fundamentadas em cominuição de partículas unitárias, onde a interação com outras partículas e mecanismos de transporte não estão presentes. A eliminação desses efeitos permite que os parâmetros dependentes do material associado aos eventos de moagem, possam ser facilmente quantificados; permite, ainda, que a energia associada no processo de cominuição seja determinada com segurança (Awachie, 1983; Narayanan, 1986; Leung, 1987; Lira, 1989).

## 2.2. Razão Específica de Fragmentação

Razão específica de fragmentação para cada grupo de partículas ( $r_i$ ), descreve a taxa na qual as partículas são moídas nesta classe. O

valor da função depende das partículas moídas e é usualmente determinada em uma forma funcional com dois ou mais parâmetros. A partir de uma série de testes em laboratório, alguns autores (Herbst e Peursgaard, 1968; Austin et al., 1975; Shoji et al., 1982) propuseram equação.

$$r_i = a \left[ \frac{x_i}{x_0} \right]^n \left[ \frac{1}{1 + \left[ \frac{x_i}{\psi} \right]^\psi} \right] \quad n > 1 \geq 1 \quad (5)$$

onde  $x_i$  é o limite superior da partícula do intervalo  $i$

$x_0$  é uma dimensão-padrão

$a$  é parâmetro que caracteriza o material

$\psi$  e  $\psi$  são fatores de correção

O valor da função depende do tamanho da partícula em que atinge um máximo e decresce; entretanto, depende das características do sistema de moagem a função pode crescer exponencialmente nas frações grossas.

### 2.3. Função de Transporte

Diversos métodos têm sido propostos na literatura para modelamento dos fenômenos de transporte (Residence time distribution - RTD), em moinhos de bola. Austin, Luckie et Ateya (1971) propuseram o modelo de difusão e Gardner & Sukanjanajtee (1973), equações empíricas. Todos esses métodos assumem comportamento de fluxo uniforme em um moinho de bola para todas as partículas.

Um fluxo não uniforme é assumido no "Perfect Mixing Model" (Whiten, 1976) e no "Multi-segment model" (Kavetsky e Whiten, 1982). Esses modelos usam uma taxa de descarga como função do tamanho das partículas. No caso do "Perfect Mixing Model", a taxa de descarga é normalizada com o volume na alimentação (sólidos mais água) e dimensões do moinho.

nho. No "Multi-segment model", a taxa de descarga é função das partículas, que depende da quantidade de material acima de 2.0mm.

Em virtude da complexidade no processo de transporte em um moinho de bola, cada modelo possui suas próprias características de descrição de fluxo, que podem ser sumarizadas como segue:

- a) "Matrix model": Utiliza-se de uma função classificação determinada a partir de análise granulométrica e de dados sobre a taxa de fluxo obtida nos circuitos fechados.
- b) "Population balance model": Normalmente, utiliza-se de estudos empíricos do tempo de residência, obtidos através de indicadores químicos e radioativos em moinhos operacionais, para descrever o tempo de residência.
- c) Os modelos abordados neste artigo utilizam-se de uma razão de descarga baseada na taxa de alimentação e nas dimensões do moinho.

### 3. "PERFECT MIXING MODEL"

Uma simplificada descrição de um processo de moagem é considerar um moinho como segmento homogêneo (Whiten, 1974/76). Neste caso, uma mistura perfeita pode ser considerada em termos do balanço de massa para cada fração de partículas "i". A equação para a taxa de mudança de  $i^{\text{th}}$  fração de partículas  $S_i$ , neste modelo, pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\frac{dS_i}{dt} = f_i - p_i + \sum_{j=1}^i a_{ij} r_j S_j - r_i S_i \quad (6)$$

onde os mecanismos utilizados neste balanço de massa são:

$f_i$  = fluxo de massa (tph) da fração de partículas "i" na alimentação

$p_i$  = fluxo de massa (tph) da fração de partículas "i" no produ

to

$r_i S_i$  = a razão de massa que surge na fração de partícula  $i^{th}$  proveniente da quebra das partículas maiores  $a_{ij}$  e a fração de massa da partícula que aparece na fração  $i^{th}$  proveniente da diminuição da fração  $j^{th}$ .

$\sum_{j=1}^i a_{ij} r_j S_j$  = a taxa de massa fragmentada (tph) da fração da partícula  $i^{th}$ .  $S_i$  é a massa e  $r_i$  a específica taxa de fragmentação.

A específica taxa de descarga  $d_i$  da fração de partículas  $i^{th}$  proveniente do moinho, é definida pela equação:

$$p_i = d_i S_i \quad (7)$$

Na representação matemática deste modelo,  $f_i$ ,  $p_i$  e  $S_i$  são vetores e  $d_i$  e  $r_i$  são matrizes diagonais e  $a_{ij}$  uma matriz triangular. A específica taxa de descarga  $d_i$  é normalizada pela razão de fluxo e dimensões do moinho, como segue:

$$d_i = d_i^* \frac{4V}{D^2 L} \quad (8)$$

onde:  $V$  = volume fluxo do moinho (sólido e água)

$L, D$  = o comprimento e diâmetro do moinho

$d^*$  = constante para pequenas partículas e anula-se para partículas maiores.

Figura 2(a) mostra uma típica variação de  $d_i^*$  com a partícula e a Figura 2(b) ilustra a normal variação de  $r_i$  com a partícula.

Em condições estáveis, a razão de mudança do conteúdo do moinho é nula. Nestas condições, o lado direito da equação (6) anula-se. O conteúdo do moinho  $S_i$  pode ser eliminado na equação (6), através do rearranjo das equações (6), (7) e (8) na fração de partícula  $i$ , respectivamente a partir do conhecimento da relação  $r_i/d_i$  e  $a_{ij}$ .

Como a "appearance function"  $a_{ij}$  é determinada independentemente, através dos resultados dos testes de cominuição em laboratório com partículas unitárias, a razão  $r_i/d_i^*$  são os elementos do "perfect mixing model", que precisa ser determinada por meio de técnicas de integração matemática. A normalizada razão de cominuição  $r_i/d_i^*$  é relacionada com as partículas e é representada por uma função matemática (third order cubic spline function; Whiten, 1971), com três ou mais pontos da curva.

O "Multi-segment Model" é uma extensão do "Perfect mixing model", onde o moinho é dividido em um número de segmentos que é representada pela equação do balanço de massa do "Perfect mixing model". Cada um desses segmentos assume o mesmo grau de cominuição para  $i^{th}$  frações de partículas. A descarga  $d_i$  depende da quantidade de partículas acima de 2.0mm. O conteúdo de cada segmento é influenciado pela oscilação da polpa no limite entre os segmentos. Figura 3 mostra o diagrama deste modelo.

**4. MODELAMENTO E SIMULAÇÃO DO CIRCUITO DE MOAGEM DE JUBILEE**

Uma série de amostragens foi conduzida pelo autor no circuito de cominuição da mina de Jubilee (Western Austrália), com o objetivo de simular e otimizar o circuito, utilizando os modelos Lynch-Rao (Lynch, 1977), para os ciclones e o "Perfect mixing model" (Whiten, 1976) para os moinhos.

Figura 4 ilustra o circuito de moagem de Jubilee, onde uma série de três completas amostragens foi conduzida. Os pontos de amostragem e balanço de massa são destacados nesta figura.

**4.1. Parâmetros dos Modelos**

Os parâmetros do moinho de bola e ciclones foram determinados por meio de técnicas de interação numéricas não lineares (numerical non-linear least-squares fitting techniques). Nesta técnica, os parâme



tros são ajustados até o modelo "melhor" reproduza o produto observado correspondente à alimentação do equipamento.

Os parâmetros requeridos na descrição da performã de um moinho, por meio do "perfect mixing model", são:

- a) "Appearance function",  $a_{ij}$
- b) Relação entre a taxa de cominuição e a normalizada descarga,  $r_i/d_i^*$ .

Os valores de  $a_{ij}$  foram determinados independentemente em laboratório, utilizando um duplo pêndulo (Narayanan, 1986, Leung, 1987; Lira, 1989). Os parâmetros da razão  $r_i/d_i^*$  foram determinados através da interação matemática a partir da análise granulométrica obtida durante a amostragem do circuito e a "appearance function". Uma vez que  $a_{ij}$  foram determinados experimentalmente, os parâmetros que descrevem a relação  $r_i/d_i^*$  versus tamanho das partículas, são os parâmetros do modelo. Um sumário da reprodutividade dos modelos para a descarga do moinho e "overflow" dos hidrociclones para o circuito de cominuição de Jubilee, são apresentados na Tabela 1. Os três pontos da abcissa (spline knots) apresentados nesta Tabela, foram utilizados para descrever a relação entre taxa de cominuição e partícula no moinho de bola. Observa-se na Tabela 1 uma excelente aproximação entre os dados encontrados na amostragem do circuito e os obtidos através dos modelos utilizados.

O trabalho de simulação e otimização do circuito de cominuição da mina de Jubilee foi publicado pelo JKMRRC do Departamento de Minas e Metalurgia da Universidade de Queensland - Austrália (Kojovic & Lira, 1989).

TABELA 1 - Resultados do modelamento do circuito de cominuição da mina de Jubilee

Partícula (mm)	Descarga Observada (%peso)	do Moinho Calculada (%peso)	Hidro ciclones			
			Overflow Obs.	(%peso) Calc.	Underflow Obs.	(%peso) Calc.
11.20	0.81	0.01	0.00	0.00	1.04	0.23
8.00	0.50	0.04	0.00	0.00	1.03	0.57
5.66	0.72	0.11	0.00	0.00	1.78	1.16
4.00	0.83	0.23	0.00	0.00	2.19	1.58
2.83	0.75	0.40	0.00	0.00	2.13	1.76
2.00	0.39	0.55	0.00	0.00	1.38	1.54
1.41	0.43	0.86	0.00	0.00	1.32	1.73
1.00	0.94	1.51	0.02	0.00	1.93	2.50
0.70	2.36	2.92	0.06	0.00	3.83	4.39
0.50	4.06	4.71	0.20	0.06	5.53	6.21
0.35	6.75	7.01	0.74	0.48	7.99	8.29
0.25	9.87	9.32	2.24	2.01	10.60	10.09
0.17	12.50	10.80	5.55	5.12	12.40	10.82
0.12	9.60	10.13	7.58	7.92	8.82	9.29
0.08	7.47	8.82	8.93	9.48	6.29	7.49
0.06	5.86	7.42	8.95	9.76	4.51	5.90
0.04	6.35	6.98	9.85	10.95	5.16	5.54
-0.04	29.81	28.18	55.87	54.22	22.07	20.91
tph sólidos	439.1	442.5	110.0	109.9	439.1	442.6
% sólidos	73.1	73.3	48.3	48.3	73.1	73.3
m <sup>3</sup> /h água	161.6	161.2	117.7	117.8	161.6	161.2
Spline knots (mm)		0.07	0.70		7.00	
Parâmetros Ln( $r_i/d_i^*$ )		0.213	2.70		5.34	

## 5. CONCLUSÃO

Os modelos matemáticos desenvolvidos no JKRC para moinhos de bola (Perfect mixing model - Multi-segment model), são aplicados com sucesso na simulação dos circuitos industriais de cominuição.

Os resultados na simulação dos circuitos de cominuição /classificação da mina de Jubilee, representam uma amostra da potencialidade dos modelos matemáticos apresentados.

A utilização da informação adicional sobre as características de moagem, a partir de testes em laboratório com partículas unitárias, permite que o efeito da fragmentabilidade do minério seja incorporado aos parâmetros requeridos nos modelos.

## 6. AGRADECIMENTOS

O autor agradece aos funcionários da Mina de Jubilee, pela assistência e cooperação na condução da amostragem da planta, e ao "Julius Kruttschmitt Mineral Research Centre - JKRC, onde os trabalhos computacionais foram desenvolvidos.

Finalmente, ao Departamento de Mineração e Geologia da Universidade Federal da Paraíba, onde este trabalho foi realizado.

## 7. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

- APLING, A.C.; MONTALDO, D.H. & YOUNG, P.A., 1982. "The development of a combined comminution-classification-flotation model". XIV International Mineral Processing Congress, Toronto, Canadá.
- AUSTIN, L.G., 1971/72. "A review introduction to the mathematical description of grinding as a rate process". Power Technology, 5(1), 1-17.
- AUSTIN, L.G.; LUCKIE, P.T. & WIGHTMAN, D., 1975. "Steady-state simulation of a cement-milling circuit". Int. Journal of Mineral Processing, 2, 127-150.

- AUSTIN, L. G., 1973b. "Understanding ball mill sizing". Ind. Eng. Chem. Process. Des. Develop. 12, No. 2, 121-129
- AUSTIN, L. G., LUCKIÉ, F. T. & ATEYA, B. G., 1971. "Residence time distributions in mills". Cement and Concrete Research, Pergamon Press., 1, 241-256
- AWACHIE, S.E.A., 1983. "Development of crusher models using laboratory particle breakage data". Ph.D. Tese. University of Queensland, Austrália.
- GARDNER, R.F. & SUKARJNAJTEE, K., 1973. "A combined tracer and back-calculation method for determining particulate breakage functions in ball milling Part III: Simulations of an open-circuit continuous milling system". Powder Technology. 7, 169-179.
- GAUDIN, A.M & MELOY, T.P., 1962. "Model and a comminution distribution equation for repeated fracture". S.M.E./A.I.M.E. 233, 43-50.
- HARRIS, C.C., 1968. "Batch grinding kinetics". S.M.E./A.I.M.E., 241, 359-364.
- HERBST, J.A. & PUERSTENAU, D. W., 1968. "The zero order production of fine sizes in comminution and its implications in simulation". Trans. Soc. Min. Eng. A.I.M.E., 241, 538-548.
- HERBST, J.A., GRANDY, G.A. & MIKA, T.S., 1971. "On the development and use of lumped parameter models for continuous open - and closed-circuit grinding systems". Trans. Instn. Min. Metall. 80. C193-198.
- KAVETSKY, A. & WHITEN, W. J., 1982. "Scale-up relations for industrial ball mills". Proc. Australas. Inst. Min. Metall. No. 282, 47-55.
- KLIMPEL, R. R. & AUSTIN, L. G., 1970. "Determination of selection - for - breakage functions in the batch grinding equation by non - linear optimization". Ind. Eng. Chem. Found., 9, 230 - 237.
- KOJOVIC, T. & LIRA B. B., 1988. "Modelling and simulation of the Jubilee grinding circuit, JKMRC Report to Jubilee Mining.
- LEUNG, K., 1987. "An energy based, ore specific for autogenous and semi-autogenous grinding mills". Ph.D. Tese (unpublished). University of Queensland, Austrália.
- LIRA, B. B., 1989. "The development and application of an energy - based ball mill simulation and design technique". Tese. University of Queensland, Austrália.

- LYNCH, A. J., 1977. Mineral crushing and grinding circuits. The simulation optimisation design and control. Elsevier Publishing Company, Amsterdam: 340pp.
- LYNCH, A. J., WHITEN, W. J. & NARAYANAN, S. S., 1986. "Ball mill models: Their evolution and present status". Advances in Mineral Processing S. M. E./A.I.M.E. 48-66.
- NARAYANAN, S. S., 1986. "Development of a laboratory single particle breakage technique and its application to ball mill modeling and scale-up". Ph.D. Tese. University of Queensland, Austrália.
- REID, K. J. 1965. "A solution to batch grinding equation". Chem. Eng. Sci. 20. 953-963.
- SHOJI, K., AUSTIN, L. G., SMAILA, F., BRAME, K. & LUCKIE, P.T., 1982. "Further studies of ball and powder filling effects in ball milling. Powder Technology. 31. 121-126.
- WHITEN, W. J., 1971. "The use of multi-dimensional cubic splines in regression and smooting". The Australian Computer Journal, 3(2). 81-88.
- WHITEN, W. J., 1974. "A matrix theory of comminution machines". Chem. Engineering. Science, 29, 589-599.
- WHITEN, W. J., 1984. "Ball mill simulation using small calculatiors". Proc. Australas. Inst. Min. Metall., 258, 47-53.

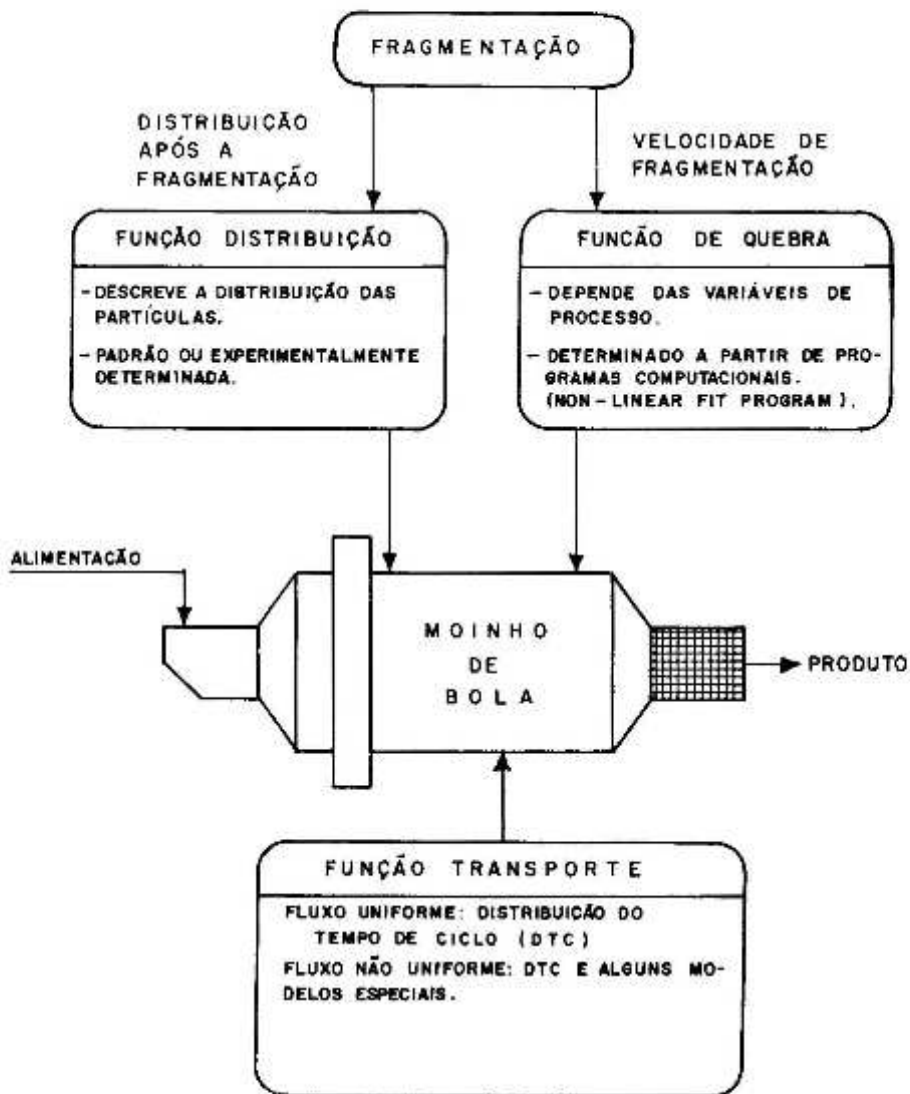


FIGURA 1 - Mecanismos básicos dos MOINHOS DE BOLA.

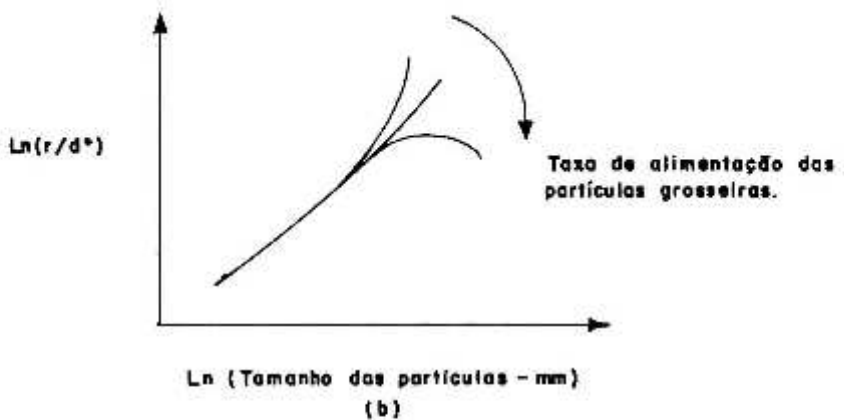
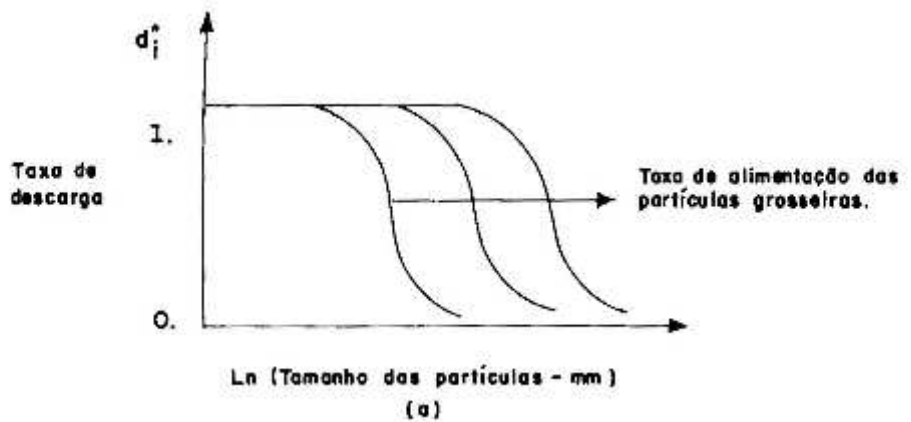


FIGURA 2 - (a,b) Típica variação da taxa de fragmentação e razão de descarga no "perfect mixing model."

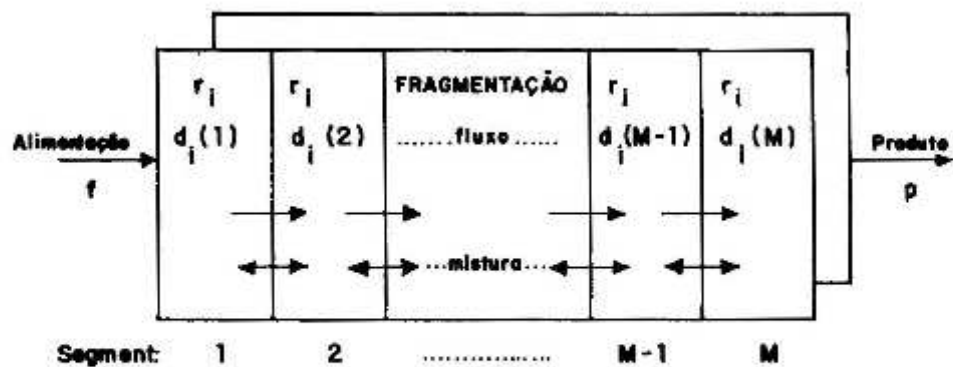


FIGURA 3 - Esquemática representação da estrutura do "multi segment model."



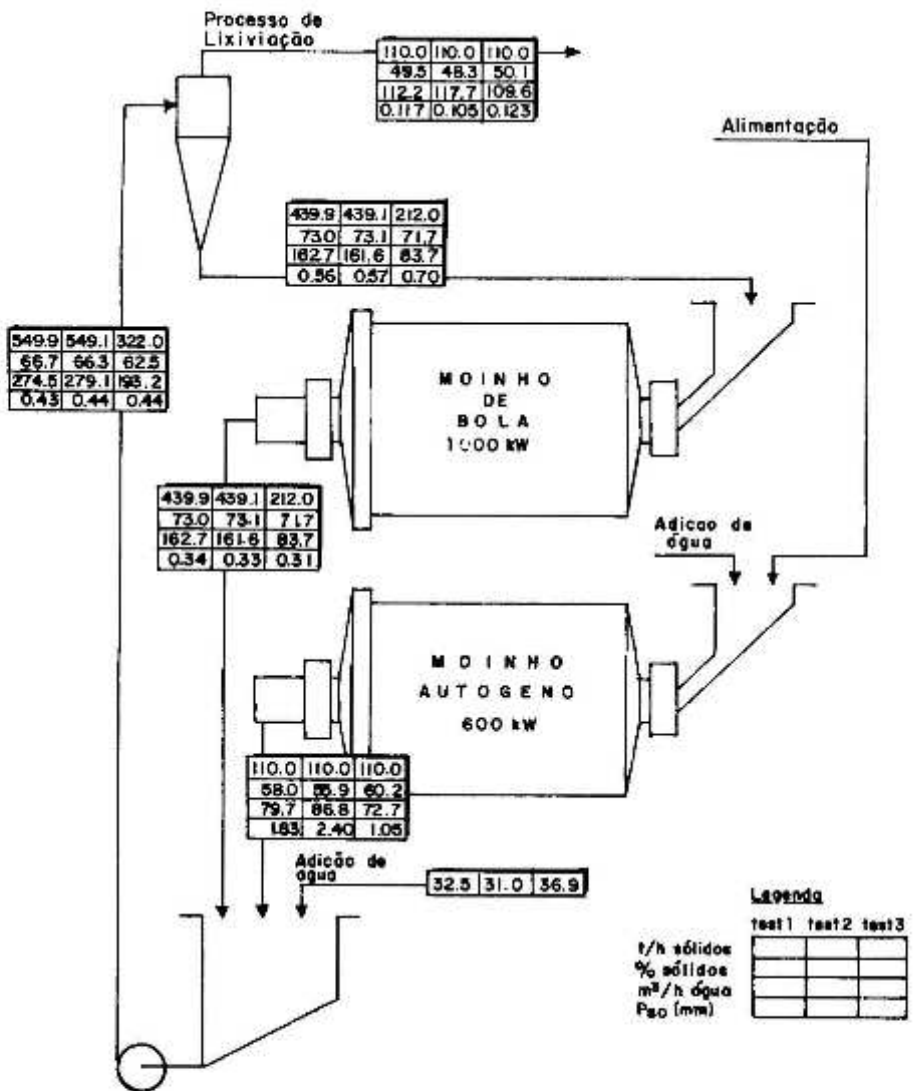


FIGURA 4 - Balanço de massa do circuito de cominuição da mina de Jubilee (Austrália).