

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE MODELOS MATEMÁTICOS USANDO AS TÉCNICAS DE PLACKETT-BURMAN E *CLUSTER ANALYSIS*

Luiz Rogério P. De Andrade Lima⁽¹⁾; Roberto C. Villas-Bôas⁽²⁾; Hélio Marques Kohler⁽³⁾

(1) Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia
Rua Aristides Novis, 2, Federação, Salvador, Ba

(2) Centro de Tecnologia Mineral (CETEM-CNPq)
Rua 4, Quadra D, Cidade Universitária, Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, RJ

(3) Departamento de Ciência dos Materiais e Metalurgia da PUCRio
Rua Marques de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ

RESUMO

A análise de sensibilidade dos parâmetros de modelos matemáticos multivariáveis é um problema complexo. A fim de testar a aplicabilidade das técnicas estatísticas de Plackett-Burman e Análise Grupal (*Cluster Analysis*) para esta finalidade, utilizou-se o simulador LIXPILHA como gerador de dados experimentais. Este simulador foi desenvolvido para a lixiviação cianídrica, em pilha, de minérios auríferos. No presente trabalho, considerou-se quinze variáveis de entrada e quatro respostas para um bloco de vinte experimentos, analisados por ambos procedimentos estatísticos. A análise destes resultados mostrou consistência com a fenomenologia do processo. Entretanto, algumas discrepâncias entre os métodos foram notadas. Estas diferenças são creditadas aos efeitos secundários, originados das interações entre as variáveis, que poderiam ter sido negligenciadas no método de Plackett-Burman pelo confundimento.

ABSTRACT

The sensitivity parameters analysis of multivariable mathematical model is a complex problem. For this purpose in order to test the applicability of the statistical approach of Plackett-Burman and Cluster Analysis the LIXPILHA simulator was used to generate the experimental data. This simulator was developed for cyanide heap leaching of gold ores. In the present work 15 variables input and 4 responses output was considered in a block of 20 experiments which were analysed using both statistical techniques. The analysis of the experimental results show consistency with the phenomenology of the process. However, some discrepancy between methods were noticed. These differences were credited to secondary effects originated of variable interactions that could be neglected in the Plackett-Burman method by confounding.

PALAVRAS-CHAVE: Análise de Sensibilidade; Modelagem Matemática; Lixiviação em Pilha; Plackett-Burman; *Cluster Analysis*;

1 - INTRODUÇÃO

A modelagem matemática e da simulação computacional aplicada a área mineral vem demonstrado ser uma importante ferramenta, pois tem propiciado a redução de custos e esforços nas tarefas de acompanhamento, análise, otimização, controle e desenvolvimento de processos.

O uso de simuladores na área de processos mineralúrgicos geralmente requer o conhecimento de alguns parâmetros cuja mensuração nem sempre é suficientemente simples e precisa. A análise de sensibilidade de um modelo matemático ou de um simulador consiste na quantificação da influência exercida pelas diversas variáveis de entrada, sobre as respostas, ou variáveis de saída. Com esta análise é possível avaliar a real importância das variáveis para o modelo, assim como, a necessidade de uma precisa determinação destas.

Neste trabalho utilizou-se o conhecimento heurístico e duas técnicas estatísticas bastante empregadas no meio minero-metalúrgico, Plackett-Burman e *Cluster Analysis*, para fazer a análise de sensibilidade de um simulador desenvolvido para o processo de lixiviação em pilha (LIXPILHA). A técnica de Plackett-Burman é indicada quando as variáveis principais do problema estudado não apresentem interações de primeira ordem previsíveis, o que não é o caso das variáveis do simulador estudado, entretanto, decidiu-se, mesmo ciente deste fato, empregar esta técnica pela sua simplicidade e facilidade do uso. Para não incorrer em possíveis erros realizou-se a *Cluster Analysis*, que não permite distinguir variáveis que tenham idêntica influência na resposta, entre si, mas que possibilita distinguir as que “saem da reta”.

2 - O SIMULADOR “LIXPILHA”

Apesar da complexidade dos fenômenos físicos e químicos envolvidos nos processos hidrometalúrgicos encontra-se na literatura alguns trabalhos sobre este tema. Para lixiviação em pilhas, de uma forma geral, os modelos conhecidos podem ser classificados como [1]:

. **modelos empíricos** - provenientes do ajuste de equações a resultados experimentais, por exemplo, através de análise de regressão. Estes modelos são relativamente simples, entretanto os seus resultados são limitados as condições usadas no seu desenvolvimento.

. **modelos fenomenológicos** - baseados na utilização da equação da continuidade para representar o escoamento dos fluidos no meio poroso, equações cinéticas para representar as reações sólido-fluido e equação da conservação da energia. Estes modelos são complexos, por isso necessitam de hipóteses simplificadoras para viabilizar a solução. Em geral a adequação do modelo depende do rigor das hipóteses simplificadoras.

. **modelos neurais** - baseados na utilização da técnica de redes neurais artificiais que vem sendo aplicada na modelagem e simulação de sistemas complexos como alternativa as técnicas convencionais [2].

O *software* LIXPILHA [3] é um simulador dinâmico para o processo de lixiviação cianídrica, em pilha, de minérios auríferos de baixo teor, que está baseado em modelos fenomenológicos para o escoamento do meio poroso e para as reações sólido-fluido. O esquema de cálculo empregado neste divide a pilha em camadas finitas e determina a interação lixivante-minério, segundo o modelo de núcleo minguante e camada-camada, segundo o modelo de fluxo pistonado.

3 - PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS COM A TÉCNICA DE PLACKETT-BURMAN

Existem inúmeras técnicas disponíveis para planejamento de experimentos tecnológicos, tais como: fatorial completo, fatorial fracionado, quadrado latino, Hadamard, etc. O método de Plackett-Burman [4] é uma das técnicas mais populares no meio minero-metalúrgico, pois, trata-se de um planejamento fatorial altamente fracionado, permitindo a extração de diversas informações com um número bastante reduzido de experimentos. Neste método, cada bloco padrão de N experimentos (onde N pode ser 8, 12, 16, 20, 24, 32, etc.) é recomendável para análise de até N-1 variáveis.

Algumas das variáveis usadas neste método não dizem respeito aos fenômenos estudados, são as variáveis chamadas de "fictícias", que possibilitam o cálculo da variância, do erro padrão e da significância de cada efeito. Os experimentos neste tipo de planejamento devem ser realizados com os níveis das variáveis combinados de tal forma que cada um deles apareçam igual número de vezes para cada uma delas. Os autores deste método propuseram para cada valor de N uma combinação de níveis, um inferior e outro superior, representados por (+) e (-) respectivamente, que sendo alterados ciclicamente geram a matriz de experimentos.

O tratamento estatístico neste tipo de planejamento é bastante simples [5]. O efeito de uma variável sobre uma dada resposta é a diferença entre o valor médio da resposta para os $N_p=N/2$ testes executados com a variável no nível alto e o valor médio da resposta para os $N_n=N/2$ testes executados no nível baixo, ou seja:

$$Ea = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} R_{p[i]}}{N_p} - \frac{\sum_{i=1}^{N_n} R_{n[i]}}{N_n}$$

A variância dos efeitos pode ser estimada utilizando-se os efeitos das variáveis fictícias da seguinte forma:

$$V_{eff} = \frac{\sum_{j=1}^{Nf} E_{v[j]}^2}{Nf}$$

A relação entre a variância dos efeitos e o erro padrão dos efeitos é:

$$S_{eff} = \sqrt{V_{eff}}$$

A significância de cada efeito pode ser determinada utilizando-se o teste t de Student. O valor de t tabelado para certo grau de confiança, usualmente maior que 90 %, e número de graus de liberdade, dado pelo número de variáveis fictícias, é comparado com o valor de t calculado para cada efeito. Se o t calculado for menor que o tabelado para uma certa variável o efeito produzido pela alteração dos níveis desta na resposta analisada não é significativo, com uma certeza correspondente ao grau de confiança que foi utilizado para determinar t calculado. Os valores de t podem ser calculados para cada efeito utilizando-se a equação:

$$t_a = \frac{|E_a|}{S_{eff}}$$

4 - CLUSTER ANALYSIS

A associação de variáveis é extremamente útil em diversos campos do conhecimento, desde a caracterização tipológica de jazidas até a taxonomia numérica. Com ela pode-se concluir sobre a existência de ligação entre variáveis que possuem considerável similaridade. Uma das técnicas utilizadas para este fim é a Análise Grupal ou *Cluster Analysis*, que dispõe de diversos métodos para o cálculo do índice de similaridade entre as variáveis. A representação da *Cluster Analysis* é feita através das matrizes de correlação ou dos dendrogramas, que representam graficamente o grau de similaridade nas relações existentes entre as variáveis [6].

5 - EXECUÇÃO DOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta análise de sensibilidade foram considerados os seguintes parâmetros cinéticos fornecidos pelo simulador LIXPILHA: tempo de meia-vida da pilha, taxa inicial de recuperação de ouro, concentração de ouro na primeira fração do licor de lixiviação

recuperado e o tempo decorrido até ser coletada a primeira fração do licor de lixiviação com cianeto. Estes parâmetros foram escolhidos, pois além de fornecerem informações cinéticas sobre o processo, apresentam interesse operacional.

Para a realização dos experimentos numéricos usando o planejamento de Plackett-Burman escolheu-se dois níveis das variáveis consideradas com valores bastante próximos dos encontrados nos casos reais, conforme mostrado na Tabela I.

Como no caso em estudo existem quinze variáveis a analisar utilizou-se o bloco de Plackett-Burman de vinte experimentos, cuja representação matricial é mostrada na Tabela II.

TABELA I - DADOS PARA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO

VARIÁVEL	NÍVEL (-)	NÍVEL (+)
$D_{CN_{ef}}$ [m ² /h]	3.5×10^{-7}	7.0×10^{-7}
ρ_P [g/cm ³]	2.5	5.0
γ_{Au} [ppm]	2.0	4.0
θ_{Au} [%]	80	100
γ_{Ag} [ppm]	250	500
θ_{Ag} [%]	70	100
CT_{LIX} [kg _{LIX} /t _{MN}]	0.5	1.0
H_L [m]	2.5	5.0
M_L/S_L [t/m ²]	5.0	10.0
ε_L [%]	45	75
σ_L [%]	10	20
$[CN]_{IN}$ [g/l]	0.5	1.0
Q_S [l/(m ² h)]	6.5	13.0
n []	20	50
R_P [mm]	20	40

TABELA II - MATRIZ DE EXPERIMENTOS DE PLACKETT-BURMAN

NÍVEL DAS VARIÁVEIS

TESTE	DcN _{cf}	ρ_P	γ_{Au}	θ_{Au}	γ_{Ag}	θ_{Ag}	CT _{LEX}	H _L	M _L /S _L	ε_L	σ_L	[CN] _{IN}	Q _S	n	R _P	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄
1	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-
2	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+
4	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-
5	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-
6	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-
7	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-
8	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+
9	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-
10	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+
11	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-
12	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+
13	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+
14	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+
15	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+
16	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-
17	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-
18	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+
19	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

6 - TRATAMENTO ESTATÍSTICO DOS RESULTADOS

Após a realização dos vinte experimentos numéricos, com as variáveis combinadas conforme a Tabela II, foram obtidos os resultados reportados na Tabela III.

TABELA III - RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

TESTE	RESPOSTAS			
	$t_{1/2}$ [dia]	r^o [%/dia]	CA _{DN} [ppm]	t_{CCN} [dia]
1	6.81	33.28	1.600	2.644
2	18.21	13.39	1.600	1.803
3	4.97	19.82	4.000	3.990
4	12.21	19.50	2.000	2.644
5	7.75	15.86	6.400	3.269
6	10.46	33.42	4.000	1.262
7	3.97	66.78	2.000	1.500
8	8.47	75.58	3.115	0.721
9	17.17	15.75	0.800	0.829
10	67.99	8.15	0.800	5.000
11	7.42	26.97	6.400	3.173
12	3.05	78.01	4.000	0.661
13	3.88	31.73	3.200	1.635
14	6.14	65.46	4.000	1.471
15	15.63	47.68	2.492	0.361
16	3.07	130.93	4.000	0.736
17	37.09	16.63	2.000	0.793
18	11.60	22.87	3.607	2.404
19	7.31	8.29	1.000	6.130
20	4.90	54.32	1.600	0.793

Pôde-se proceder à análise estatística dos experimentos utilizando-se as equações anteriormente apresentadas e os valores de t de Student tabelado correspondente a quatro graus de liberdade, uma vez que este foi o número de variáveis fictícias utilizadas. Os resultados desta análise são apresentados nas tabelas IV e V.

Para o cálculo da similaridade, visando o agrupamento das variáveis, utilizou-se o método de Pearson-Weighted Pair-Group Average (WPGA) [6] que possibilitou a construção dos dendrogramas mostrados nas Figuras 1 a 4.

TABELA IV - ANÁLISE ESTATÍSTICA: TEMPO DE MELA-VIDA DA FILHA E TAXA INICIAL DE RECUPERAÇÃO DE OURO

VARIÁVEL	$t_{1/2}$			r^0			
	Efeito da Variável	t-Student	Significância Relativa (%)	Efeito da Variável	t-Student	Significância Relativa (%)	
DCN _{de}	-8.889	2.315	91.8	1.441	0.219	*	
p _r	9.780	2.547	93.6	7.337	1.115	*	
T _{de}	-1.794	0.467	*	-6.581	1.000	*	
θ _{de}	-5.836	1.520	*	13.899	2.112	*	
T _{de}	-2.866	0.746	*	-10.801	1.641	*	
θ _{de}	-6.412	1.670	*	4.523	0.687	*	
CT _{LDL}	12.112	3.154	96.5	-25.803	3.921	98.3	
H _L	3.134	0.816	*	5.011	0.762	*	
M _L /S _L	-1.080	0.281	*	-20.483	3.113	96.4	
σ _L	3.368	0.877	*	-22.763	3.459	97.4	
σ _L	3.258	0.848	*	-20.533	3.121	96.4	
[CN] _{de}	-10.876	2.832	95.3	14.131	2.148	90.2	
Q ₃	-6.586	1.715	*	24.113	3.665	97.8	
n	6.290	1.638	*	10.895	1.656	*	
R _r	13.026	3.392	97.2	-12.039	1.830	*	
V1	3.182	0.829	*	5.817	0.884	*	
V2	5.300	1.380	*	10.155	1.543	*	
V3	-2.742	0.714	*	-4.269	0.649	*	
V4	3.640	0.948	*	-4.245	0.645	*	
			S _{DEP} = 3.840				S _{DEP} = 6.580
			* < 90 %				* < 90 %

TABELA V - ANÁLISE ESTATÍSTICA: CONCENTRAÇÃO DE OURO NA PRIMEIRA FRAÇÃO DO LICOR DE LIXIVIAÇÃO E TEMPO NO QUAL INICIA A SAÍDA DE CIANETO NÃO REAGIDO

VARIÁVEL	C_{Au}			t_{CCN}		
	Efeito da Variável	t-Student	Significância Relativa (%)	Efeito da Variável	t-Student	Significância Relativa (%)
DCN _d	0.037	0.133	*	0.541	0.855	*
P _r	-0.083	0.288	*	-0.306	0.483	*
γ_{Au}	1.678	0.050	99.6	-0.297	0.469	*
θ_{Au}	0.260	0.937	*	0.136	0.216	*
γ_{Ag}	-0.379	1.365	*	0.238	0.377	*
θ_{Ag}	0.163	0.588	*	0.072	0.144	*
CT _{LIX}	-1.803	6.500	99.7	0.680	1.076	*
H _L	-0.037	0.133	*	0.741	1.172	*
M _L /S _L	0.402	1.448	*	0.621	0.981	*
σ_L	0.220	0.793	*	0.686	1.084	*
σ_L	0.419	1.509	*	1.396	2.207	90.8
[CN] _{IV}	1.740	6.273	99.7	-0.372	0.587	*
Q ₂	-0.420	1.514	*	-1.752	2.770	95.0
n	0.202	0.727	*	-0.193	0.305	*
R _p	-0.019	0.067	*	-0.450	0.712	*
V1	0.438	1.580	*	0.631	0.997	*
V2	0.162	0.583	*	0.369	0.584	*
V3	-0.020	0.072	*	-0.799	1.264	*
V4	-0.299	1.076	*	0.653	1.033	*
			$S_{EPP} = 0.2774$			
			* < 90 %			
				$S_{EPP} = 0.6324$		
				* < 90 %		

CLUSTER ANALYSIS: $t_{1/2}$
 Weighted pair-group average
 1-Pearson r

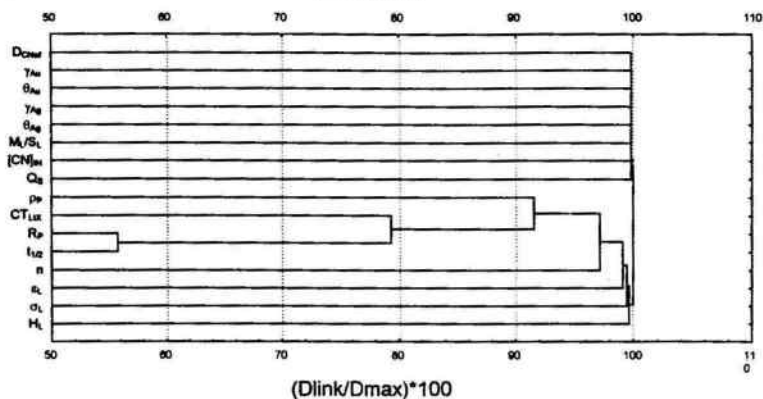


FIGURA 1 - DENDROGRAMA RELACIONANDO AS VARIÁVEIS E O TEMPO DE MEIA-VIDA DA FILHA

CLUSTER ANALYSIS:
 Weighted pair-group average
 1-Pearson r

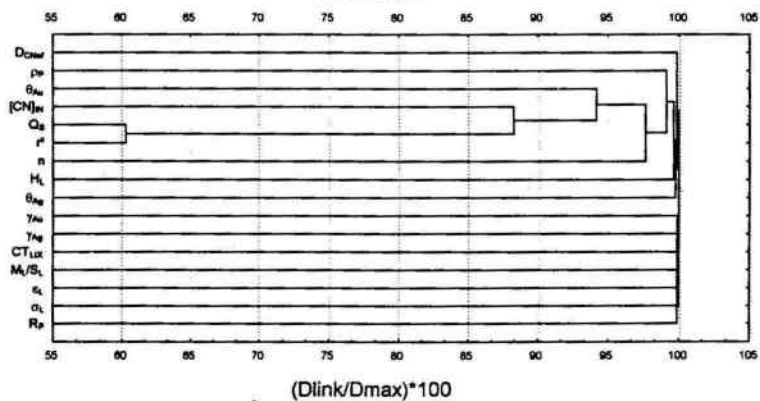


FIGURA 2 - DENDROGRAMA RELACIONANDO AS VARIÁVEIS E A TAXA INICIAL DE RECUPERAÇÃO DE OURO

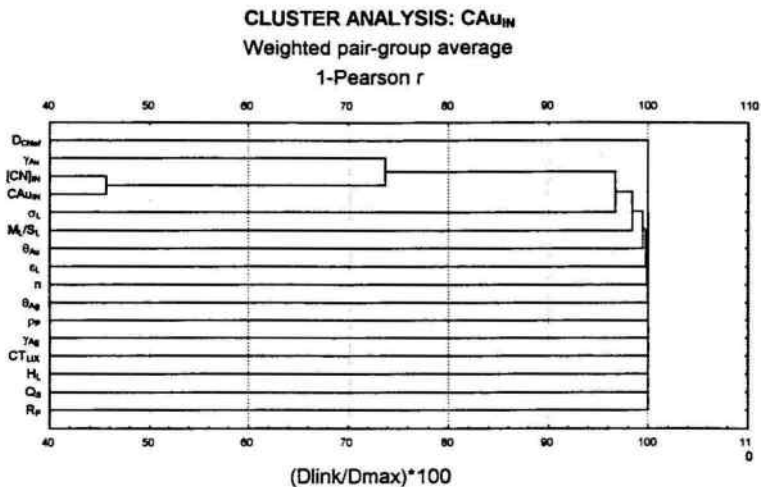


FIGURA 3 - DENDROGRAMA RELACIONANDO AS VARIÁVEIS E A CONCENTRAÇÃO DE OURO NA PRIMEIRA FRAÇÃO DO LICOR DE LIXIVIAÇÃO

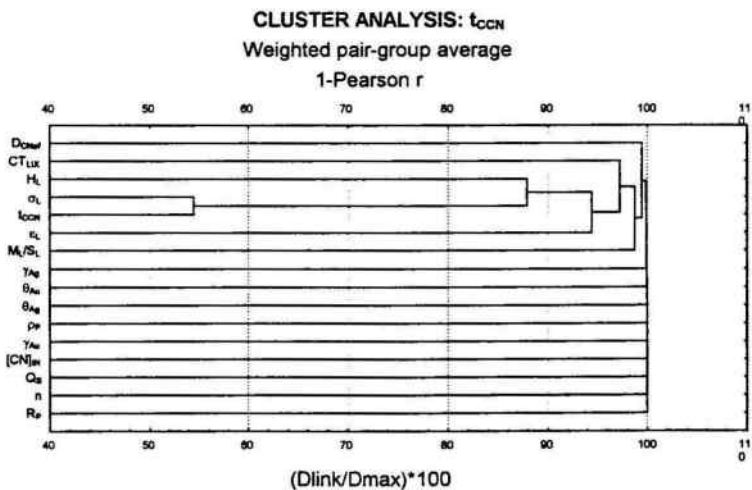


FIGURA 4 - DENDROGRAMA RELACIONANDO AS VARIÁVEIS E O TEMPO NO QUAL INICIA A SAÍDA DE CIANETO NÃO REAGIDO

7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Levando-se em consideração os resultados das análises estatísticas e o conhecimento heurístico do problema pode-se construir o quadro resumo apresentado na Tabela VI.

TABELA VI - QUADRO RESUMO COMPARANDO OS RESULTADOS FORNECIDOS PELAS TÉCNICAS DE PLACKETT-BURMAN (PB) E CLUSTER ANALYSIS (CA) COM DEDUÇÕES HEURÍSTICAS (DH)

	t_{ij}			r^2			CA_{DN}			t_{CCN}		
	PB	CA	DH	PB	CA	DH	PB	CA	DH	PB	CA	DH
DCN_{df}	X		X									
p_p	X	X	X									
γ_{An}							X	X	X			
θ_{An}					X							
γ_{Ag}												
θ_{Ag}												
CT_{LIX}	X	X	X	X			X		X		X	X
H_L											X	X
M_L/S_L				X		X		X	X			
v_L				X		X					X	X
σ_L				X		X		X		X	X	X
$[CN]_{DN}$	X		X	X	X	X	X	X	X			
Q_5				X	X	X				X		X
n		X			X							
R_p	X	X	X									

As discrepâncias nos resultados obtidos pelos dois métodos são creditadas ao fato de que a análise de experimentos segundo a técnica de Plackett-Burman, por se tratar de um planejamento fatorial altamente fracionado, pode mascarar resultados, aumentando ou diminuindo a importância de algumas variáveis, pois os efeitos encontrados para cada variável, aparentemente efeitos principais, na realidade correspondem a um somatório do efeito principal destas com vários efeitos secundários, oriundos de interações entre variáveis.

8 - CONCLUSÕES

As técnicas estatísticas aqui enfocadas (Plackett-Burman e *Cluster Analysis*) podem muito bem ser utilizadas conjuntamente para fazer análise de sensibilidade de modelos matemáticos complexos e simuladores.

Deve-se ter cautela com os resultados obtidos, pois o método de Plackett-Burman, ao confundir o efeito principal das variáveis analisadas com o efeito das interações entre estas, pode conduzir a uma avaliação equivocada.

Os dendrogramas obtidos com a *Cluster Analysis* dão uma visão muito clara da ligação existente entre as diversas variáveis, mas o método escolhido para o cálculo das similaridades pode influenciar nos resultados.

9 - AGRADECIMENTOS

Um dos autores (L.R.P. De Andrade Lima) agradece ao Dr. José Clodoaldo Silva Cassa pelas valiosas discussões e sugestões.

10 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - De Andrade Lima, L.R.P., Villas-Bôas, R.C. e Kohler, H.M., "Modelos Matemáticos para a Lixiviação em Pilha", In: IV Encuentro del Hemisfério Sur Sobre Tecnologia Mineral, Concepcion-Chile (1994).
- 2 - Cassa, J.C., Da Cunha Neto, E.D. e De Andrade Lima, L.R.P., "Modelagem do Processo de Lixiviação em Pilha Usando Redes Neurais", In: XVI Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Hidrometalurgia, Rio de Janeiro (1995).
- 3 - De Andrade Lima, L. R. P., "Simulação da Lixiviação em Pilha de Minérios Auríferos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ (1992).
- 4 - Plackett, R.L. e Burman, J.P., "*The Design of Optimun Multifactorial Experiments*", *Biometrika*, v.33, p.305-325, (1946).
- 5 - Stowe, R.A. e Mayer, R.P., "*Efficient Screening of Process Variables*", *Industrial and Engineering Chemistry*, v.58, n.2, p.36-40, (1966).

NOTAÇÃO

CAu_{IN}	Concentração de ouro na primeira fração do licor de lixiviação
$[CN]_{IN}$	Concentração do cianeto alimentado
CT_{LIX}	Consumo total de lixiviante
DCN_{ef}	Difusividade efetiva do cianeto no minério
$Dlink$	Índice de dissimilaridade entre variáveis
$Dmax$	Índice máximo de dissimilaridade entre variáveis
Ea	Efeitos da variável a
$EV_{[j]}$	Efeitos das j variáveis fictícias
H_L	Altura da pilha
M_L/S_L	Relação massa-área irrigada da pilha
n	Número de subdivisões na pilha consideradas na resolução numérica do problema
N	Número total de experimentos
Nf	Número de variáveis fictícias
Nn	Número de experimentos executados com a variável a no nível inferior
Np	Número de experimentos executados com a variável a no nível superior
Q_s	Taxa de irrigação da pilha
r^o	Taxa de recuperação no início do processo
$Rn_{[j]}$	Resposta para os testes executados com a variável a no nível inferior
R_p	Tamanho médio das partículas minério
$Rp_{[j]}$	Resposta para os testes executados com a variável a no nível superior
$Seff$	Erro padrão dos efeitos
ta	t-Student para a variável a
t_{CCN}	Tempo no qual inicia a saída do cianeto não reagido da pilha
$t_{1/2}$	Tempo de meia-vida da pilha
V_{eff}	Variância dos efeitos
V_1	Variável fictícias 1
V_2	Variável fictícias 2
V_3	Variável fictícias 3
V_4	Variável fictícias 4
γ_{Ag}	Teor de prata no minério
γ_{Au}	Teor de ouro no minério
ϵ_L	Porosidade da pilha
ρ_p	Densidade do minério
σ_L	Saturação da pilha
θ_{Ag}	Máxima recuperação de prata do minério por lixiviação
θ_{Au}	Máxima recuperação de ouro do minério por lixiviação